6 Exercice — 30′ — 6 Points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2°) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a) Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b) Calculer la distance IJ.

3°) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b) Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4°) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,-1+\sin\theta,-3)$.

a) Vérifier que N est un point de la sphère S.

b) Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c) Montrer que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d) En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre $ABCN$ est minimal.

7 Exercice — 20′ — 4 Points

Les questions 1°) et 2°) sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct. $ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre. Son arête a pour longueur 1, le centre de la face $ABCD$ est le point I.

Aucune figure n'est demandée sur la copie

1°) a) Déterminer $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble ($\mathscr{E}$) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{F}$) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

2°) On appelle P le barycentre du système { $(A, 2)$; $(C, -1)$}.

a) Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit ($\mathscr{H}$) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Déterminer l'ensemble ($\mathscr{H}$).

c) Montrer que le point A appartient à l'ensemble ($\mathscr{H}$).

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn